



زیربرنامه **LUSGS**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **توسعه دهندگان:** | **فرزین چایچی‌زاده-حجت دهقان‌درست** | E:\desktop mordad\battery code\Thesis\thesis 21 aban 96 Saeed\Figures\Other\TehUni-HQ.png |
| **تهیه کننده مستند:** | **فرزین چایچی‌زاده حجت دهقان‌درست** | |
| **تاریخ تنظیم سند:** | **06 / 02 /96** | |
| **تایید کنندگان:** |  | |
| **شماره سند:** | **MC2F064F1** | |
| **زبان برنامه نویسی:** | **Fortran 90** | |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **LUSGS(Dim,NC,NF1,NF2,NF,IDS,NX,NY,NZ,DA,GM,Res, NnonzeroCell, InonzeroCell,InonzeroFace,Vol,DT,WNP1,WB,P,Mu,Mut,PrL,PrT,X,Y,Z,xc,yc,zc,MR,DW)** | | | |
| **Dimension** | **Variable Type** | **Description** | **Intent** |
|  |  |  | **Input** |
|  | Integer | Maximum **Dim**ension of Arrays | Dim |
|  | Integer | **N**umber of Existing **C**ells | NC |
|  | Integer | Index of 1st Non-Boundary **F**aces | NF1 |
|  | Integer | Index of Last Non-Boundary **F**aces | NF2 |
|  | Integer | Index of Last Face of Mesh | NF |
| (1:6,1:Dim) | Integer | **I**nformation of Grid **D**ata **S**tructure | IDS |
| (1:Dim) | Real(8) | Normal Vectors of each Face | NX,NY,NZ |
| (1:Dim) | Real(8) | Area of each Face | DA |
|  | Real(8) | **G**ama Constant (Specific Heat Ratio) | GM |
| (1:5,1:Dim) | Real(8) | **Res**idual (right hand side of main equation) | Res |
| (1:Dim) | Integer | **N**umber of **Non-zero** **Cell**s around a particular cell + 1 (the cell itself) | NnonzeroCell |
| (1:10,1:Dim) | Integer | **I**ndex of the **Non-zero** **Cell** | InonzeroCell |
| (1:10,1:Dim) | Integer | **I**ndex of the **Non-zero** **Face** | InonzeroFace |
| (1:Dim) | Real(8) | **Vol**ume of each cell | Vol |
| (1:Dim) | Real(8) | Time Step | DT |
| (1:5,1:Dim) | Real(8) | Conservative Values at (N+1)st Time Step | WNP1 |
| (1:6,1:Dim) | Real(8) | Conservative Values and Pressure at **B**oundary Faces | WB |
| (1:Dim) | Real(8) | **P**ressure | P |
| (1:Dim) | Real(8) | Molecular Viscosity | Mu |
| (1:Dim) | Real(8) | Burbulent Viscosity | Mut |
|  | Real(8) | **Pr**antle Number for **L**aminar Flow | PrL |
|  | Real(8) | **Pr**antle Number for **T**urbulent Flow | PrT |
| (1:Dim) | Real(8) | Coordinate of Points | X,Y,Z |
| (1:Dim) | Real(8) | Coordinate of Element’s Center | Xc,Yc,Zc |
|  | Real(8) | **M**ach Number over **R**eynolds Number of **inf**inite Flow | MR |
|  |  |  | **Output** |
| (1:5,1:Dim) | Real(8) | **D**iffrenceofConservative Values at (N+1)st,(N)st | DW |

* 1. وظایف

در این زیربرنامه مقدار تغییرات متغیرهای بقایی به صورت ضمنی در گام زمانی فعلی و بعدی به روش LUSGS محاسبه می‌گردد. با جایگذاری مناسب ویسکوزیته مولکولی و توربولانسی می‌توان از این زیر برنامه برای جریان‌های غیرلزج، آرام و مغشوش استفاده نمود.

* 1. توضیحات و تئوری ها

روش‌های حل ضمنی به دلیل پایداری بالا، امکان استفاده از گام‌های زمانی بزرگتر و همچنین نرخ همگرایی بهتر مورد توجه می‌باشند. در این زیر برنامه روش ضمنی LUSGS به عنوان یک روش بسیار پایدار و بسیار سریع توضیح داده می‌شود. ولی این روش به نسبت سایر روش‌های ضمنی نرخ همگرایی ضعیف تری در مسائل پیچیده از خود نشان می‌دهد ولی در مسائل ساده‌تر بهترین روش حل ضمنی است. در ادامه به توضیح روش گسسته‌سازی زمانی پرداخته می‌شود.

* 1. گسسته سازی زمانی

با انتگرال‌گيري از معادلات حاکم بر روي حجم كنترل، انتگرال بخش‌هاي زماني و مكاني اين معادلات از هم مجزا شده و براي تمام سلول‌ها، يك دستگاه معادلات ديفرانسيل معمولي به شكل زير بدست مي‌آيد:

1. 

که در آن R عبارتست از:

1. 

رابطه ‏(1) برای تک تک سلول‌های محاسباتی برقرار بوده و در عمل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی تشکیل می‌شود. جهت بدست آوردن پاسخ حالت دائم باید این معادلات دیفرانسیل نسبت به زمان انتگرال گیری شود. با انتگرال گیری از معادله ‏(1) داریم:

1. 

دست راست معادله بالا انتگرال تابع باقی‌مانده بین زمان n و n+1 است. این انتگرال می‌تواند با تقریب انتگرال ده با یک مقدار ثابت با استفاده از مقادیر بقایی در گام زمانی جدید (n+1) و پیشین (n) محاسبه گردد. اگر انتگرال ده با مقدادیر بقایی در گام زمانی n محاسبه شوند، روش صریح است. به عبارت دیگر مقدار سمت راست معلوم بوده و تنها مقدار مجهول در معادله  است که می‌تواند به راحتی محاسبه شود.

ولی مقدار انتگرال ده می‌تواند با ترکیبی از مقادیر بقایی در زمان جدید و قدیم محاسبه شود که منجر به انواع روش‌های ضمنی می‌گردد. در اینجا گزارش از روش ضمنی اویلر استفاده خواهد شد. در روش اویلر انتگرال زمانی بخش باقیمانده () با مقدار آن در زمان آینده تقریب زده می شود. در نتیجه انتگرال بخش باقی مانده به صورت ذیل محاسبه می‌گردد.

1. 

در نتیجه معادله ‏(2) با در نظر گرفتن تقریب اویلر مطابق معادله ‏(3) به صورت ذیل بازنویسی می شود:

1. 

با تحلیل فوریه این مساله می توان نشان داد که تقریب بالا بی قید پایدار است. یعنی بدون وابستگی به اندازه گام زمانی همیشه جواب پایدار است[[1]](#footnote-1). با حل دستگاه عددی گسسته شده مکانی و زمانی می‌توان به پاسخ نهایی رسید.

شایان ذکر است که تقریب استفاده شده در معادله 2 یک تقریب مرتبه اول می‌باشد. می‌توان از روش‌های مختلف دیگری که از تقریب‌های مرتبه بالاتری برای گسسته‌سازی زمانی استفاده می‌نمایند نیز استفاده نمود. تقریب مرتبه دوم کرنک-نیکلسون یکی از تقریب‌های خوب برای گسسته‌سازی زمانی مساله است. در این روش به جای تقریب انتگرال در بازه زمانی انتگرال‌گیری با مقدار آن در گام زمانی جدید از میانگین آن در گام زمانی گذشته و آینده استفاده می‌شود (مطابق معادله ذیل):





با تحلیل فوریه مساله بالا، می‌توان نشان داد که تقریب کرنک-نیکلسون نیز بی قید از نوع A پایدار است. هر کدام از روش‌های ذکر شده و سایر روش‌های دیگر نیز می‌تواند برای تقریب انتگرال ده مورد استفاده قرار بگیرد. نکته قابل توجه این است که در حل‌های دائم استفاده از تقریب بهتر می‌تواند نرخ همگرایی را بالا برده و در مسائل سخت تر عملکرد بهتری را شاهد بود. ولی در مسائل غیردائم نه تنها موارد قبل برقرار بوده بلکه در حل نهایی هر گام زمانی نیز تاثیر گذار است.

با حل دستگاه معادلات جبری حاصله از گسسته سازی زمانی مطابق معادله ‏(4) می‌توان به جواب رسید. با توجه به اینکه  دارای ترم‌های غیر‌خطی می‌باشد، لذا می‌بایست دستگاه معادلات جبری را با روش‌هایی مانند نیوتن – رافسون محاسبه نمود. ولی این کار حجم بسیار زیادی محاسبات به حل تحمیل می‌کند. لذا در کارهای عددی اغلب ترم‌های غیر‌خطی را با نوشتن بسط تیلور با یک تقریب مرتبه دوم خطی‌سازی می‌کنند.

1. 

که در آن  بوده و  ژاکوبین نام دارد. برای یک مساله با n مجهول، ژاکوبین یک ماتریس است. به عنوان مثال در یک مساله لزج سه بعدی (که دارای 5 مجهول می باشد) ژاکوبین یک ماتریس است. روش‌های مختلفی برای محاسبه ژاکوبین وجود دارد که در بخش‌های بعدی به آن پرداخته می‌شود.

با جاگذاری ترم‌ خطی شده در معادله ‏(4) داریم:

1. 

در نهایت با بازنویسی رابطه بالا به یک دستگاه معادلات جبری ماتریسی مطابق معادله زیر می‌رسیم.

1. 

که در آن  و  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

1. 
2. 

در حقیقت در معادله بالا  (مجهولات) یک ماتریس به تعداد سلول‌های محاسباتی است. از آنجا که در حالت سه بعدی 5 متغیر بقایی وجود دارد در نتیجه  یک ماتریس با (5×تعداد سلول) سطر و یک ستون می‌باشد. ماتریس ضرایب مجهول نیز یک ماتریس (5×تعدادسلول) × (5×تعدادسلول) است. در حقیقت ماتریس ژاکوبین برای هر متغیر یک ماتریس 5×5 است. هر سطر این ماتریس ضرایب که خود شامل 5 درایه می‌باشد نشان دهنده معادلات سیالاتی برای یک سلول محاسباتی است. توضیحات بیشتر در مورد این ماتریس و نحوه چیدن آن برای حالت غیرلزج دو بعدی به عنوان یک مثال آسان در فایل پاورپوینت ضمیمه آورده شده است.

شایان به یادآوری است از آنجا که در روش ضمنی نیاز است تا دستگاه معادلات غیر خطی حاصله از گسسته زمانی را خطی‌سازی کنیم، لذا اگر جواب از جواب واقعی بسیار دور باشد با وجود استفاده از روش ضمنی ممکن است جواب همگرا نگردد. چرا که مقدار خطای برشی خطی‌سازی در گام‌های زمانی بسیار بزرگ، کوچک نبوده و لزوما برای هر گام زمانی، حل پایدار نیست. برای بهبود این موضوع و همچنین افزایش سرعت حل از روش SOR استفاده شده‌است. در این حالت جواب مساله در گام زمانی بعدی با اضافه نمودن ضریب زیرتخفیف پایدارتر می‌گردد‌. در این روش جواب مساله در گام زمانی بعدی با فرمول زیر محاسبه می‌گردد.

1. 

که در آن  مقدار متغیر بقایی حاصل از حل عددی است. عدد زیر تخفیف  عددی بین صفر تا 1 است. البته می توان آن را بزرگتر از 1 نیز فرض نمود. ولی این کار کمکی به پایداری ننموده و فقط در مسائل خطی برای افزایش سرعت حل استفاده می‌شود. همچنین شایان به ذکر است که یافتن مقدار مناسب ضریب زیر تخفیف بسیار به مساله و شبکه محاسباتی مربوط است. ولی به عنوان یک قاعده سر انگشتی می بایست برای مش‌های درشت‌تر از ضریب زیر تخفیف کوچک‌تر و برای مش‌های ریزتر از ضریب زیر تخفیف بزرگ‌تر استفاده نمود. همچنین هرچه مساله غیرخطی‌تر باشد اعمال ضریب زیر تخفیف کوچک‌تر مساله را پایدارتر می‌کند. یک تصویر اشتباه از ضریب زیر تخفیف وجود دارد که بیان می‌کند انتخاب ضریب زیر تخفیف کوچکتر سبب کندتر شدن مساله می‌گردد. این تصویر کاملا اشتباه بوده و لازم به تاکید است که برای هر مساله ضریب زیر تخفیف بهینه وجود دارد که نه تنها سبب کندتر شدن مساله نمی گردد بلکه می تواند سرعت حل را به میزان قابل ملاحظه ای افزایش دهد.

همچنین در این روش جهت بدست آوردن حل جريان هاي دائم می‌توان از گام زماني موضعي استفاده نمود كه تا حد زيادي سرعت همگرايي را بالا مي برد اما در شبيه سازي هاي غيردائم استفاده از آنها امكانپذير نمي‌باشد.

با اعمال ضریب زیر تخفیف و همچنین استفاده از گام‌های زمانی موضعی کافی است معادله ‏(11) حل گردد. روش‌های مختلفی برای حل این دستگاه معادلات موجود می‌باشد که در بخش‌های بعدی به آن پرداخته می‌شود.

* + 1. ژاکوبین:

محاسبه ژاکوبین یکی از بخش‌های اصلی یک حل ضمنی می‎باشد. همانطور که ذکر شد، ژاکوبین برای هر وجه عبارتست از:

1. 

در یک مساله سیالاتی با تقریب مرتبه اول برای باقی‌مانده، مقدار  برای سلول محاسباتی i ام برای یک سلول محاسباتی با مش مثلثی مطابق شکل 1به صورت ذیل محاسبه می‌شود:

1. 

که در آن شار بصورت زیر تعریف می‌شود.

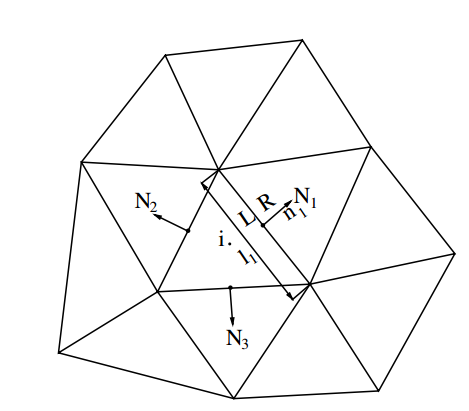
1. 

که در آن  و  به ترتیب مقادیر شار (مشتقات نسبت به x) غیرلزج و ویسکوز است و  و  به ترتیب مقادیر شار (نسبت به y) غیرلزج و ویسکوز است.

با در نظر گرفتن معادله ‏(15) و اینکه هندسه شبکه مکانی مستقل از خواص است، مقدار ژاکوبین برای سلول اصلی و سلول‌های همسایه به صورت ذیل بدست می‌آیند[1]:

1. ****

1. ****



شکل 1: شکل سلول محاسباتی iام در یک مش مثلثی در حالت دو بعدی

در حقیقت ماتریس معادله ‏(17) ماتریس ضریب سطر i و برای سلول‌های همسایه  است و ماتریس معادله ‏(18) بخشی از ضریب قطر اصلی برای سلول i است. به عبارت دیگر هر وجه دارای دو ماتریس ژاکوبین بوده که یکی با در نظر گرفتن تغییرات مقادیر بقایی سلول اصلی و دیگری با تغییرات مقادیر بقایی سلول همسایه محاسبه می‌شود.

محاسبه ژاکوبین هر وجه برای سلول اصلی و همسایه می‌تواند با روش‌های مختلفی انجام پذیرد که به دو دسته کلی تحلیلی و عددی تقسیم بندی می‌شود. همانطور که می‌دانیم تابع  بستگی به روش گسسته سازی مکانی دارد. به عبارت دیگر با تغییر روش محاسبه شارها (مانند جیمسون، AUSM و ...) تابع باقی‌مانده تغییر کرده و در نتیجه ژاکوبین نیز تغییر خواهد‌یافت.

برای محاسبه ژاکوبین به صورت تحلیلی لازم است که روش تقریب محاسبه شار درنظر گرفته شود. در مرجع رینالدی و همکاران [2] ژاکوبین تحلیلی دقیق اغلب روش‌های متداول در دینامیک سیالات عددی آورده شده‌است. لازم به ذکر است که برای محاسبه ژاکوبین به صورت تحلیلی، لازم به استفاده از روش یکسان با گسسته سازی مکانی نیست. چرا که در حل دائم در حقیقت حل تا زمانی که ترم زمانی از بین رود ادامه می‌یابد و جواب نهایی با تقریب گسسته سازی بدست می‌آید. در نتیجه زمانی که جواب به حل دائم برسد عملا تاثیر نحوه محاسبه ژاکوبین از بین می رود. تنها تاثیر تغییر نحوه محاسبه ژاکوبین سرعت همگرایی می‌باشد. در اینجا از خانواده روش رو به عنوان یکی از مطرح ترین روش ها برای محاسبه ژاکوبین استفاده شده است. نحوه محاسبه ژاکوبین سایر روش‌ها در مرجع [2] موجود می‌باشد. برای سادگی این محاسبات برای یک شبکه دو بعدی توضیح داده شده‌است. ولی همین روش بدون هیچگونه تغییری برای حالت سه بعدی نیز قابل تعمیم می‌باشد.

روش رو ژاکوبین بخش جابه‌جایی:

در روش رو شار از رابطه ذیل محاسبه می‌گردد[1] .

1. 

که در آن عبارتست از:

1. 

که در آن  به ترتیب بردار مقدار ویژه چپ، ماتریس قطری مقادیر ویژه و بردار ویژه راست هستند. مقادیر را می‌توان در مرجع [1,3] یافت. با جایگذاری رابطه ‏(20) در روابط ‏(17) و ‏(18) خواهیم داشت:

1. ****

1. ****

در روابط ‏(23) و ‏(24) محاسبه ترم  تولید یک تانسور مرتبه سوم می‌نماید. بدست آوردن این تنسور هم بسیار سخت است و هم هزینه محاسباتی بسیار بالایی دارد. لذا در مراجع مختلف از این ترم صرفه نظر نموده‌اند. این تقریب در جریان‌های هموار تقریب خوبی بوده و برای CFLهای تا حدود 1000 نیز در حالت دو بعدی از دقت خوبی برخوردار است. برای اطلاعات بیشتر در این ارتباط می‌توان به مرجع [1] مراجعه نمود.[[2]](#footnote-2) در روابط ‏(23) و ‏(24) با صرف نظر از داریم:

1. 

1. 

برای محاسبه  از تقریب مرتبه دوم بسط تیلور برای محاسبه شار در زمان جدید استفاده می‌کنیم:

1. 

تا اینجا محاسبه مقدار ژاکوبین با روش رو انجام شده است و با جایگذاری روابط ‏(24) و ‏(25) در ‏(10) دستگاه معادلات جبری تکمیل می‌گردد. شایان ذکر است که در رابطه ‏(25) با اضافه کردن شارها تمامی وجوه برای سلول اصلی مقدار  به دلیل بسته بودن حجم برابر صفر می گردد و عملا نیازی به محاسبه آن نیست.

برای محاسبه ژاکوبین‌های وجوه مرزی با توجه به عدم استفاده از روش سلول مجازی عملا سلول همسایه برای آن وجه وجود نداشته و مقدار متغیرهای بقایی با توجه به نوع مرز از مقادیر معلوم و مقادیر متغیرهای بقایی روی سلول اصلی (و در تقریب های مرتبه بالا چند سلول اطراف) دارای یک رابطه معلوم می‌باشد. با توجه به توضیحات عملا برای وجه مرزی تنها معادله ‏(26) مقدار داشته و معادله ‏(25) وجود نخواهد داشت. لذا برای محاسبه ژاکوبین وجه مرزی تنها می‌بایست  محاسبه شود. برای این کار تنها کافی است با استفاده از معادله اصلی و جایگذاری مقادیر معلوم و یا مقادیر مرتبط با سلول اصلی از سلول اصلی محاسبه شود. (در این کد به دلیل استفاده از متغیرهای مرزی تنها کافی است که مقدار WBها استفاده شوند چرا که عملا تمامی روابط معلوم و ارتباطات با سلول اصلی در محاسبه آن ها لحاظ می‌شوند.)

**روش تامادور ژاکوبین بخش جابه‌جایی:**

در روش تامادور شار بخش جابه‌جایی از رابطه ذیل محاسبه می‌شود:

1. 

که در آن از رابطه ذیل محاسبه می‌شود:

1. 

همانطور که ملاحظه می‌گردد روش تامادور نیز شباهت فراوانی به روش رو داشته و تنها مقدار ماتریس مقادیر ویژه  به اسکالر تبدیل شده و در نتیجه کل ماتریس  به یک مقدار اسکالر  تبدیل می‌شود. (چرا که می‌توان ماتریس  را با ماتریس واحد در یک اسکالر جایگزین نمود. در مرحله بعد به دلیل معکوس بودن ماتریس مقدار ویژه چپ و راست عملا نتیجه نهایی یک ماتریس واحد در اسکالر خواهد بود.) این روش نسبت به روش رو دارای دیسیپیشن بیشتری بوده و سبب پایداری بیشتر حل می گردد. ولی به دلیل تخمین محافظه کارانه، ریت همگرایی نسبت به روش رو ضعیف تر می‌باشد. این ریت در مسائل ساده ‌تر خیلی چشم گیر نبوده و عملا استفاده از روش تامادور به دلیل تقریب یک ماتریس با یک اسکالر بسیار سریع تر و کارآمد می باشد و همچنین به دلیل پایداری بیشتر قابلیت استفاده از CFLهای بالاتر را نیز ممکن می نماید.

**محاسبه ژاکوبین بخش پخش:**

در قسمت قبل ژاکوبین تحلیلی بخش جابه‌جایی محاسبه گردید. در این بخش ژاکوبین بخش پخش محاسبه می‌گردد. همانطور که در قسمت‌های قبلی نیز ذکر گردید می‌توان ژاکوبین این بخش را نیز به صورت عددی با روند مشابه بدست آورد. ولی همانطور که ذکر گردید حجم محاسبات این روش بالا بوده و حجم زیادی حافظه اشغال می‌کند و عملا برای مسائل واقعی غیر قابل استفاده می‌شود.

در روش LUSGS ماتریس ژاکوبین با یک اسکالر در ماتریس واحد جایگزین می‌گردد. در مراجع مختلف تقریب‌های بسیار متنوعی برای این مقدار اسکالر پیشنهاد داده شده است. بر اساس آزمایش‌های عددی انجام گرفته دو اسکالر ذیل به ترتیب از مراجع [4] و [5] پیشنهاد می‌گردند.

1. 
2. 

شایان ذکر است که این مقادیر برای ژاکوبین سلول اصلی به صورت مثبت و برای سلول همسایه به صورت منفی است.

نهایتا با جایگزینی مقادیر ژاکوبین بخش جابه‌جایی و پخشی در روابط ‏(17) و ‏(18) و مقدار دهی آن در معادله ‏(10) ماتریس ضرائب تکمیل می‌گردد.

* + 1. حل دستگاه معادلات جبری خطی اسپارس:

دستگاه معادلات جبری به دست آمده، یک ماتریس بسیار بسیار بزرگ اسپارس است. همانطور که ذکر شد این ماتریس در حالت تقریب مرتبه پایین شار که در آن برای محاسبه شارها تنها مقادیر دو سلول مجاور آن وجه در گیر می‌باشند، ماتریس ضرائب به صورت بلوکی برای هر سطر به جز در ستون‌ها به شماره سلول اصلی و تمامی همسایه ها صفر بوده و در سایرین مقادیر ژاکوبین با روابط ‏(17) و ‏(18) جایگزین می‌گردند. جزئیات بیشتر در رابطه با نحوه چیده شدن ماتریس در فایل پاورپوینت پیوست آورده شده است.

همانطور که می دانیم برای حل دستگاه معادلات خطی اسپارس روش‌های بسیار متنوعی وجود دارد. ساده‌ترین آن محاسبه معکوس ماتریس ضرایب و ضرب نمودن آن در ماتریس مقادیر معلوم است. ولی این کار به دلیل بسیار بزرگ بودن ماتریس ضرایب امکان پذیر نمی‌باشد. در ادبیات موضوع، برای حل این ماتریس بسیار بزرگ اسپارس دو دسته روش متداول 1- زیرفضای کرایلوو (Krylov) 2- LU-SGS (Lower Upper symmetry gauss-seidel ) مطرح و پیاده سازی شده‌است.

مهمترین مشخصه روش GMRES به عنوان نماینده روش زیر فضای کرایلوو، نرخ همگرایی کوادراچر آن برای گام‌های زمانی بسیار بزرگ است. البته برای دستیابی به این نرخ همگرایی لازم است که دستگاه معادلات ضمنی به دقت ساخته شده و دقیقا معکوس آن گرفته شود. در این روش لازم است که ژاکوبین‌ها (عددی و یا تحلیلی) دقیقا محاسبه شده و برای هر وجه یک ماتریس 4×4 در حالت دو بعدی و یک ماتریس 5×5 در حالت سه بعدی محاسبه شوند. شایان به ذکر است که حجم حافظه مورد نیاز برای چیدن ماتریس به قدری بزرگ است که پیاده سازی آن را برای مسایل واقعی بسیار دشوار می‌نماید. به عنوان مثال اگر شبکه محاسباتی 6 وجهی باشد (مساله 3 بعدی) تعداد درایه مورد نیاز برای سلول‌های غیر مرزی غیر صفر می تواند به صورت زیر محاسبه شود:

تعداد سلول‌های محاسباتی غیر مرزی × (1 + 6 ) × (5×5)

لذا برای هر یک میلیون سلول محاسباتی و در نظر گرفتن متغیر double حجم حافظه برای ذخیره این ماتریس در حالت بهینه کدنویسی حداقل حدود 1.5 گیگابایت خواهد شد. برای حل این ماتریس اسپارس بسیار بزرگ، ابتدا می‌توان با یک پری کاندیشنر خوب مانند ILU حل و جواب آن را در روش GMRES قرار داد. در حقیقت می‌توان از روش ILU-GMRES استفاده نمود. محاسبه معکوس این ماتریس حتی با استفاده از پریکاندیشنر خوب بسیار زمان‌بر خواهد بود. برای حل این دستگاه معادلات جبری خطی لازم است ابتدا مقادیر ماتریس محاسبه و به صورت معمولی و یا سطری فشرده ذخیره و با استفاده از توابع کتاب خانه ای موجود در کتابخانه های فرترن حل نمود. برای اطلاعات بیشتر در مورد روش جمرس می توان به [1] مراجعه نمود.

اما در روش SGS ماتریس ضرائب به صورت یکجا نیاز نمی باشد و در حل و در مواقع مورد نیاز تولید و مورد استفاده قرار می‌گیرند. مزیت دیگر این روش زمان حل سریع می‌باشد. طبق آزمایش‌های عددی انجام شده در صورت استفاده از ژاکوبین روش تامادور و استفاده از ژاکوبین پخش اسکالر (به این روش LU-SGS گفته می‌شود)، زمان حل حدود نصف زمان حل روش صریح با روش رانگ-کوتا مرتبه 4 است. شایان به ذکر است که این روش کاملا ضمنی بوده و با گسسته سازی ضمنی پیشرو بدون شرط پایدار است[[3]](#footnote-3). در این روش ماتریس ضرائب رابطه ‏(10) ، به ترتیب به سه ماتریس بالا مثلثی بلوکی، پایین مثلثی بلوکی و قطری بلوکی تجزیه می‌شود.

1. **

شایان ذکر است که منظور از ماتریس بلوکی، ماتریسی است که هر درایه آن خود یک ماتریس (بلوک) 4x4 در حالت دو بعدی و 5x5 در حالت سه بعدی است. توضیحات بیشتر در این مورد در فایل پاورپوینت ضمیمه اورده شده است.

با استفاده از جبر ماتریسی رابطه ‏(32) می‌تواند بصورت زیر بازنویسی می‌شود:

1. 

در این روش از ترم دوم سمت راست معادله بالا صرف نظر می‌شود. در ادامه با تعریف حل اصلی به حل دو دستگاه معادله بالا مثلثی و پایین مثلثی مطابق معادلات ذیل منجر می‌گردد:

1. 

1. 

واضح است که  را می توان با جاروب پیشرو حل نمود. چرا که با پیش‌روی پیشرو مقادیر ماتریس L معلوم شده و با رابطه ذیل می‌توان براحتی متغیرهای بقایی آن سلول را محاسبه نمود.

1. 

که در آن معکوس ماتریس ژاکوبین بلوک قطر اصلی برای آن سلول مشخص است. شایان ذکر است که در صورت استفاده از روش تامادور و ژاکوبین اسکالر برای بخش پخش، ماتریس D به صورت یک اسکالر در ماتریس واحد درآمده و معکوس آن نیز یک بر اسکالر در ماتریس واحد است.

سپس  را با فرم بازنویسی شده معادله ‏(35) با جاروب پسرو به صورت مشابه براحتی حل می‌گردد.

1. 

با جایگذاری مقادیر ژاکوبین‌ها معادلات ‏(33) و ‏(34) به ترتیب به صورت زیر بدست می‌آیند.

1. 

1. 

که در آن

1. 

است.

* 1. بخش­های زیربرنامه

در این قسمت تمام بخش های زیربرنامه مطابق با شماره گذاری موجود در برنامه کامپیوتری ارائه شده است.

1. محاسبه مقادیر ویژه بخش جا‌به‌جایی و پخش

مقادیر ویژه مجموع بخش جا‌به‌جایی و پخش برای تمامی سلول‌های محاسباتی با استفاده از رابطه ‏(37) محاسبه می‌گردند.

1. مشخص نمودن نحوه گسسته‌سازی

همانطور که در کد نیز آورده شده است، با تعیین مقدار IsCN برابر با 2 و 1 به ترتیب گسسته سازی با روش اویلر (رابطه ‏(4) ) و روش کرنک-نیکلسون (رابطه ‏(6) ) صورت پذیرفته می‌شود.

1. مشخص نمودن نوع شبکه

در این بخش با تعیین مقدار NeqI برابر با 5 و 4 به ترتیب کد قابلیت استفاده برای مش‌های دوبعدی و سه‌بعدی را خواهد داشت.

1. حلقه حل پیشرو

با توجه به تئوری در این قسمت محاسبات بخش حلقه پیشرو انجام می‌پذیرد.

1. صفر کردن متغیرهای خروجی

در این حلقه تمامی تغییرات متغیرهای بقایی اصلی و واسطه سلول jام برابر با صفر می‌گردند.

1. حلقه محاسبات بر روی سلول‌های غیرصفر

با توجه به تئوری در این حلقه تمامی محاسبات بر روی سلول‌های غیر صفر انجام می‌پذیرد.

1. مقدار دهی برخی متغیرهای محلی

در این بخش شماره سلول همسایه و شماره وجه مشترک در متغیرهای محلی ذخیره می‌شوند.

1. شرط پایین مثلثی

در این قسمت شرط اینکه سلول همسایه نه مرزی باشد و نه بزرگتر مساوی سلول اصلی مشخص می‌گردد. درحقیقت این شرط بیانگر آن است که در ماتریس ضرائب، ضریب سلول همسایه در پایین مثلث است.

1. محاسبه بخش شار ژاکوبین

در این بخش، سهم شار ژاکوبین () برای سلول همسایه مطابق رابطه ‏(24) محاسبه می‌گردد.

1. محاسبه ژاکوبین سلول همسایه

در این بخش ژاکوبین سلول همسایه و یا به عبارت دیگر ضریب ماتریس برای سلول همسایه مشخص با رابطه ‏(22) محاسبه می‌گردد.

1. محاسبه ضریب سلول اصلی

در این بخش ضریب سلول اصلی و یا به عبارت دیگر قطر ماتریس ضرائب برای یک سلول مشخص مطابق رابطه  محاسبه می‌گردد.

1. محاسبه تغییرات متغیر واسطه

در این بخش تغییرات متغیر واسطه برای سلول اصلی با استفاده از رابطه ‏(35) محاسبه و با تکرار حلقه بر روی تمامی سلول‌ها این مقادیر واسطه برای تمامی سلول‌ها محاسبه می‌گردند.



1. حلقه حل پسرو

با توجه به تئوری در این قسمت محاسبات بخش حلقه پسرو انجام می‌پذیرد.

1. صفر کردن متغیرهای خروجی

در این حلقه تمامی تغییرات متغیرهای بقایی اصلی سلول jام برابر با صفر می‌گردند. در این قسمت برخلاف حل پیشرو متغیرهای واسطه مورد استفاده قرار خواهند گرفت و درنتیجه نباید برابر با صفر قرار داده شوند.

1. حلقه محاسبات بر روی سلول‌های غیرصفر

با توجه به تئوری در این حلقه تمامی محاسبات بر روی سلول‌های غیر صفر انجام می‌پذیرد.

1. مقدار دهی برخی متغیرهای محلی

در این بخش شماره سلول همسایه و شماره وجه مشترک در متغیرهای محلی ذخیره می‌شوند.

1. شرط بالا مثلثی

در این قسمت شرط اینکه سلول همسایه نه مرزی باشد و نه کوچکتر مساوی سلول اصلی مشخص می‌گردد. درحقیقت این شرط بیانگر آن است که در ماتریس ضرائب، ضریب سلول همسایه در بالا مثلث است.

1. محاسبه بخش شار ژاکوبین

در این بخش، سهم شار ژاکوبین () برای سلول همسایه مطابق رابطه ‏(24) محاسبه می‌گردد.

1. محاسبه ژاکوبین سلول همسایه

در این بخش ژاکوبین سلول همسایه و یا به عبارت دیگر ضریب ماتریس برای سلول همسایه مشخص با رابطه ‏(22) محاسبه می‌گردد.

1. محاسبه ضریب سلول اصلی

در این بخش ضریب سلول اصلی و یا به عبارت دیگر قطر ماتریس ضرائب برای یک سلول مشخص مطابق رابطه  محاسبه می‌گردد.

1. محاسبه تغییرات متغیر اصلی

در این بخش تغییرات متغیر اصلی برای سلول اصلی با استفاده از رابطه ‏(36) محاسبه و با تکرار حلقه بر روی تمامی سلول‌ها این مقادیر واسطه برای تمامی سلول‌ها محاسبه می‌گردند.



مراجع:

[1] Amir Nejat “A higher-order accurate unstructured finite-volume Newton-Krylow algorithm for inviscid compressible flows” PhD thesis University of British Columbia 2007

[2] Rinaldi Enrico et al. “Exact jacobians for implicit Navier-Stokes simulations of equilibrium real gas flows” J. Comp. Physics, 270 (2014) 459-477

[3] Axel Rohde, “Eigenvalues and eigenvectors of the Euler equations in general geometries”, J. AIAA 2001-2609

[4] R. F. Chen and Z. J. Wang “Fast, block lower upper symmetry Gouss-Seidel scheme for arbitrary grids” AIAA journal Vol.38, No 12, Decenber 2000

[5] WANG Gang et al., “An Improved LU-SGS Implicit Scheme for High Reynolds Number Flow Computations on Hybrid Unstructured Mesh”, Chinese Journal of Aeronautics 25 (2012) 33-41

1. پایداری به معنای دقت در جواب نیست. [↑](#footnote-ref-1)
2. این تقریب ارتباطی به روش LU-SGS نداشته و در اغلب مراجع با حلگر GMRES که از تقریب رو برای محاسبه شار استفاده نموده‌اند بهره گرفته شده‌است. [↑](#footnote-ref-2)
3. به عنوان مثال در حالت مساله دو بعدی غیر لزج، می توان CFL را تا اعداد یک میلیون نیز افزایش داد. ولی لازم به ذکر است که بزرگ بودن CFL لزوما به معنای حل سریعتر نیست. و می‌بایست CFL در حدود 1 تا 100 برای مساله انتخاب گردد تا سریعترین سرعت همگرایی را داشته باشیم. [↑](#footnote-ref-3)